

# Zusammenfassung NFB

## Grundlagen d. num. Simulation

Basis: Partielle Dgl's  $\rightarrow$  FEM, **EDM**  
Integral-Gleichung  $\rightarrow$  BEM

Gegeben: Rand- & Anfangsbedingungen

Lsg: Diskretisierung d. Problemgebiets  $\rightarrow$  lineares system algebr. Gleichungen

- Ablauf:
- 1) Charakterisierung d. Feldproblems
  - 2) Wahl d. num. Verfahrens
  - 3) Modellierung d. Feldproblems (Geometrie, Materialeigenschaften, RB)
  - 4) Diskretisierung
  - 5) Koeff. berechnen
  - 6) Lösung d. Gleichungssystems: direkte / iterative Verfahren
  - 7) Postprocessing

Allg. Problemstellung:  $L \cdot u = f$  (in  $\Omega$ ) mit  $u(x,y,z)$  ... gesuchte Größe (Vektor)  
(z.B. part. Dgl.)  $L$  ... linearer Operator  
 $f(x,y,z)$  ... Anregung (gegeben)

R.B.: Dirichlet'sche:  $u = \bar{u}$  auf  $\Gamma_1$  [Bsp.: Elektrostatik:  $\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$  in  $\Omega$   
Neumann'sche:  $\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}$  auf  $\Gamma_2$   $\varphi = \bar{\varphi}$  auf  $\Gamma_1$   
 $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \bar{q} = \vec{n} \cdot \text{grad } \varphi = -\vec{n} \cdot \vec{E} = -\epsilon_n(\vec{n})$

Modellierung	FDM	FEM	BEM
	$\Delta \varphi = 0$ (molek. M.)	$W_{el} \geq K_{lin}$	Int.-Gl. für $\varphi$

## **BEM**

### Einführung

- 1) Ausgangsgleichung: Randintegral-Gleichung  $\rightarrow$  Diskretisierung  $\rightarrow$  algebraisches Gleichungssystem (Systemmatrix voll besetzt)
- 2) Bestimmung d. relevanten Randbedingungen
- 3) - Direkte Formulierung (R.B.)  
- Indirekte (fiktive Quellen)
- 4) alle Quellen am Rand besitzen Einfluss

### Green'sche Fkt:

- 1) Elementare Lsg. (Fundamentallösung) d. Dgl. beidseit. RB
- 2) Anregung: punktförmige Quelle  $\rightarrow \delta$ -Fkt  $\rightarrow L \cdot G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$  in  $\Omega$

### Randintegral-Darstellung

- 1) dient zur Auswertung d. Lsg. mit vilst. R.B.

- 2) Mittels Poisson-Gl. beschriebene Potenzialprobleme können (über d. Green'scher Int.-Satz) folgendes

### Integraldarstellung:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \left[ \iint_{\Omega} \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d\Omega + \oint_{\Gamma} \left[ \frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n'} G(\vec{r}, \vec{r}') - \varphi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] d\Gamma' \right]$$

Grund für  $\Omega \rightarrow \infty$  nicht berücksichtigt werden, da diese Gl. Ladungsdichten außerhalb von  $\Omega$  berücksichtigt, die durch fiktive Ladungen auf  $\Gamma$  ersetzt werden

- 3) Indirekte Formulierung:

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial n} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \dots \text{Flächenladung am Rand (Einschicht)} \\ (ii) \quad \varphi_i - \varphi_a &= -\frac{\tau}{\epsilon_0} \quad \dots \text{Dipolstärke am Rand (Doppelschicht)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Sprungbedingung für Feldgrößen} \\ &\text{an Rand} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \varphi_a = \frac{\partial \varphi_a}{\partial n} = 0 : \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \varphi_i = -\frac{\tau}{\epsilon_0}$$

$\sigma, \tau$  stellen i.d.R. fiktive Quellen dar, die den Einfluss von  $\Omega$  berücksichtigen

### Randintegral-Gleichung:

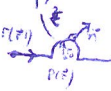
$$\varphi(\vec{r}) = \oint_{\Gamma} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n'} G - \varphi \frac{\partial G}{\partial n'} \right] d\Gamma'$$

"Integraldarstellung"

Übergang

Integralgleichung  $\rightarrow$  es kann gelten  $\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}')$

$$\hookrightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow 0 \rightarrow G = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \rightarrow \infty \text{ (Singularität)}$$

Lösung: "Hakenintegral" = 

auf  $\Gamma_\epsilon: G(\bar{z}, \bar{z}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}; \frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0^2}$

$\rightarrow \varphi(\bar{z}')$  und  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}(\bar{z}')$  sind konst. und  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \rightarrow 0 = \varphi(\bar{z})$  bzw.  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}(\bar{z})$

$k) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_\epsilon} -\varphi \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma = +\frac{1}{2} \varphi(\bar{z})$

[bei nicht glatten Rand: Kante:  $\frac{1}{4}$  (über Ebene:  $\frac{1}{8}$  Rand)]

$k) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial n} G d\Gamma = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \varphi(\bar{z}) = \oint_{\Gamma} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} G - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right] d\Gamma$   
C.H.

Discretisierung d. Randes

- \*) Zerlegung d. Randes  $\Gamma$  in kleine endl. Größe (Randelemente)
- \*) für jedes Randelement werden Stützstellen definiert  $\rightarrow (x_k, y_k, z_k)$
- \*) innerhalb d. Randelemente werden sowohl Geometrie als auch die Randwerte durch sog. Formfunktionen beschrieben

Bsp.: 2D-Quadrat:  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$  ges.  $\varphi(\bar{z})$   
 $k) \text{Int-Gl.: } \frac{1}{2} \varphi = \oint_{\Gamma} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma$   
 $k) \text{Lsg. mittels Gauß-Quadratur: } \frac{1}{2} \varphi(x_i) = \sum_{j=1}^n \varphi(x_j) \frac{\partial G(x_i, x_j)}{\partial n_j}$  mit  $i, j = 1, \dots, n$   
 $\rightarrow$  Gl-System für  $n$  unbekannte Flkt-Werte  $\varphi(x_j)$  an d. Stützstellen  $x_j$

$\Rightarrow$  Diskretisierte Randintegralgleichung:  $\frac{1}{2} \varphi_i + \sum_{j=1}^N \frac{\partial G(\bar{r}_i, \bar{r}_j)}{\partial n_j} \varphi_j = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \frac{\partial G(\bar{r}_i, \bar{r}_j)}{\partial n_j} d\Gamma$

$\Rightarrow$  BEM-Gleichungssystem:  $[H] \{ \varphi \} = [G] \{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \}$  ( $\{ \varphi \}$  ist  $\{ \varphi_e \}$ )

mit  $h_{ij} = \oint_{\Gamma} \frac{\partial G(\bar{r}_i, \bar{r}_j)}{\partial n_j} d\Gamma + \delta_{ij} \frac{1}{2}$  (für  $R \rightarrow \infty$ : Pot. für Summe aller Ladungen)  
 $\rightarrow$  eingeklinkten Pot. d. geg. Randladungen  
 $\rightarrow$  Diagonalelement  $\rightarrow$  Berechnung d. Koeff. d. Matrizen numerisch, z.B. Gauß-Legendre-Quadratur:  $\rightarrow$  Fehler

$g_{ij} = \oint_{\Gamma} G(\bar{r}_i, \bar{r}_j) d\Gamma$

$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^n w_k f(\xi_k) + E_n(f)$   
 $\rightarrow$  Fehler  
 $\rightarrow$  mit  $\xi_k \dots$  Gauß-Pkt = 1. St. d. n-ten Legendre-Polynom  $P_n(\xi)$   
 $w_k \dots$  Interpolationsgewichte  
 $* E_n = 0$  für grad  $f(\xi) \leq (2n-1)$   
 $* \text{problematisch bei Singularitäten} \rightarrow$  mod. Verfahren  
 $\rightarrow$  z.B. Gewichte bei Singularitäten selbst gering

\*) Modellierung d. Randelemente höherer Ordnung

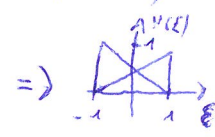
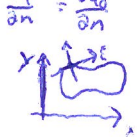
- \*) Geometrie & Randwerte werden durch sog. Formfkt. dargestellt (am häufigsten: Lagrange-Polynome)

MD: 0. Ordnung:

$N_0 = 1$   
 $\varphi = \varphi_0$   
 $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial n}$

(Punkt)

1. Ordnung:



$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$   
 $N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$

(globales  $\xi \Rightarrow$  lokales Koordinatensystem)

2. Ordnung:



$N_1(\xi) = \frac{1}{2} \xi(\xi-1)$   
 $N_2(\xi) = \frac{1}{2} \xi(\xi+1)$   
 $N_3(\xi) = 1-\xi^2$

$\Rightarrow \varphi(\xi) = \sum_{k=1}^n N_k(\xi) \varphi_k$



\*) Darstellung d. Geometrie:

$x(\xi) = \sum_{k=1}^n N_k(\xi) x_k$   
 $y(\xi) = \sum_{k=1}^n N_k(\xi) y_k$  (Koord. d. BE)

\*) Darstellung d. Randwerte:

$\varphi(\xi) = \sum_{k=1}^n N_k(\xi) \varphi_k$   
 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}(\xi) = \sum_{k=1}^n N_k(\xi) \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}$  (Randwerte d. Knoten)

\*) Berechnung d. Koeffizienten:

$h_{ij}^{(k)} = \int_{\Gamma_e} N_k(\xi) \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma$   
 $g_{ij}^{(k)} = \int_{\Gamma_e} N_k(\xi) G d\Gamma$

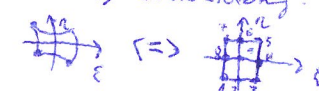
\*) Assemblierung d. Koeff.:

$h_{ij} = h_{ij}^{(1)} / \Gamma_1 + h_{ij}^{(2)} / \Gamma_{n+1}$   
 $g_{ij} = g_{ij}^{(1)} / \Gamma_1 + g_{ij}^{(2)} / \Gamma_{n+1}$

\*) Postprocessing:

$\varphi(\bar{z}_0) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} G d\Gamma - \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma$   
 $\rightarrow$  Randintegraldarstellung

2D: z.B. 4-eckige Elemente 2. Ordnung:



$\rightarrow N_1(\xi, \eta) \dots N_9(\xi, \eta)$   
 $\rightarrow x(1/2, \xi, \eta) = \sum_k N_k(\xi, \eta) \cdot x_k$

\* QB-Elemente werden unvollst. Lagrange-Polynome als Form-Fkt. für 8 Knoten

$\bar{n} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi} \times \frac{\partial y}{\partial \xi}}{1 \times 1} \quad \left| \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \bar{e}_1 + \dots \right.$   
 $\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial N_k}{\partial \xi} x_k$



Postprocessing:

$\hookrightarrow C' = 4 \frac{\epsilon_0}{l} \int \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| d\Gamma$  - Kapazität pro Längeneinheit

$\rightarrow \varphi(\vec{r}_i) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\}^T \{G_n\} - \{q\}^T \{H_n\}$  -7  $\left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\}^T \{q\}^T$  - geg. / berechnete Randwerte

$\rightarrow \vec{E} = -\text{grad } u = - \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_y$   $\{G_n\}, \{H_n\}$  - Vektoren, die für jeden Aufpunkt neu berechnet werden müssen:

(i) num. Differentiation:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_2 - u_1}{\Delta x}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_3 - u_1}{\Delta y}$

(ii) Ableitung d. Green'schen Fkt. in  $\{G_n\}$  und  $\{H_n\}$  nach  $x, y$

$\{G_n\} : g_{n,j} = \int_{\Gamma_j} G(\vec{r}_n, \vec{r}_j) d\Gamma_j$

$\{H_n\} : h_{n,j} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial G(\vec{r}_n, \vec{r}_j)}{\partial n_j} d\Gamma_j$

**FDM**

Einführung:

\* FDM ist ein Differenzialgleichungsverfahren

\* Feldbereich wird durch strukturiertes Gitter diskretisiert

\* älteste Verfahren (Euler, 1768):

$\rightarrow$  part. Abl.  $\Rightarrow$  Differenzquotient

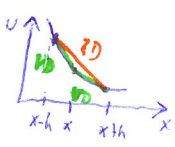
$\rightarrow$  lineares (algebraisches) Gleichungssystem

geg.  $\therefore \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t)$  mit  $u(0) = a \Rightarrow \frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\Delta t} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t}$

$\Delta t \leftarrow$  Schrittweite / Gitterkonstante

$\rightarrow$  Rekursionsbeziehung:  $x_0 = a : x_n = x_{n-1} + \Delta t \cdot f(x_{n-1})$ ,  $n \geq 1$  ("implizites Euler-Verfahren")

Num. Differentiation:



Vorderer Differenzquotient (FD):  $u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h)$

Hintere (HD):  $u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + O(h)$

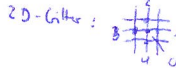
Zentraler (ZD):  $u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + O(h^2)$

2. Ableitung:

$u'(x+h/2) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h^2)$   
 $u'(x-h/2) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + O(h^2)$

$\hookrightarrow u''(x) = \frac{u'(x+h/2) - u'(x-h/2)}{h} + O(h^2)$

$\hookrightarrow u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$



$\Delta u = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0}{h^2} + O(h^2)$

(5-Punkte-Formel (in 2D))

$\rightarrow$  Laplace-Gl.:  $\Delta u = 0 : u_0 = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4} + O(h^2)$

Poisson-Gl.:  $\Delta u = -f(x) : u_0 = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4} + \frac{h^2}{4} f_0 + O(h^2)$

(sympl. Darstellung: Rechenschema)

Optimierung: 3-Plot-Rechenmethode:



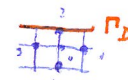
mit  $O(h^4)$



andere Vorgehensweise: Mittelwertsatz d. Potenzreihenentwicklung

Berücksichtigung d. Randbedingungen

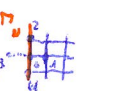
Dirichlet'sche RB:



$\Gamma_D : u = \bar{u}$  gegeben  $\rightarrow u_0 = \bar{u}_0$  konst.

$\hookrightarrow$  Gl. für Knoten 0 ( $\Delta u = 0$ ):  $-4u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = -\bar{u}_0$

Neumann'sche R.B.:



$\Gamma_N : \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{\frac{\partial u}{\partial n}}$  gegeben

$\hookrightarrow$  Gl. für Knoten 0:  $\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_0 = \frac{u_3 - u_1}{2h} \rightarrow u_3 = u_1 + \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_0 \cdot 2h$

Gl. für Knoten 0:  $-4u_0 + 2u_1 + u_2 + u_4 = -2h \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_0$

\* Rand wird an d. regelmäßige Gitter angepasst

Gewichtung d. Gitterpunkte

Gleichungssystem in Matrixform

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ -2u_0 \end{Bmatrix}$$

Matrix-Eigenschaften:

- symmetrisch
- Spärliche Matrix (pro Zeile höchstens 7 (3D) 5 (2D) von Null versch. Werte)
- Bandstruktur
- muss nicht gespeichert werden, da Verteilung der Koeff.  $k_{ij}$  regulär ist

## Lösungsverfahren

Iterative: \*) Jacobi-Verfahren:

$n=0$ , z.B.  $\{v^{(0)}\} = \{0\}$  außerhalb d. Randes, d.h. Randwerte  $\neq 0$

$$n > 0: \text{Iterationsstufe: } v_{ij}^{(n)} = \frac{1}{4} (v_{i-1,j}^{(n-1)} + v_{i+1,j}^{(n-1)} + v_{i,j-1}^{(n-1)} + v_{i,j+1}^{(n-1)})$$

(evtl. Ergänzung d. Neumannschen R.B.)

\*) geg. Randwerte im Startvektor enthalten oder als "rechte Seite" benötigt

\*) Abbruchkriterium:  $|v_{ij}^{(n+1)} - v_{ij}^{(n)}| \leq \epsilon$  ( $n \geq n_{\min}$ )

⊖ sehr langsames Konvergenzverhalten

⊖ 2 Lösungsvektoren müssen gespeichert werden:  $\{v^{(n)}, v^{(n-1)}\}$

\*) Gauß-Seidel-Verfahren:

$$v_{ij}^{(n)} = \frac{1}{4} (v_{i-1,j}^{(n)} + v_{i+1,j}^{(n-1)} + v_{i,j-1}^{(n)} + v_{i,j+1}^{(n-1)}) \quad \text{schon bekannt}$$

⊖ verbesserte Konvergenz (da aktualisierte Werte berücksichtigt werden)

⊖ nur 1 Vektor benötigt

\*) Relaxations-Methode:

\*) neue Lsg. wird mit alten Lsg. gemischt:

$$v_{ij}^{(n)} = v_{ij}^{(n-1)} + w (v_{ij}^{(n)} - v_{ij}^{(n-1)}) \quad \text{mit } w \dots \text{Relaxationsfaktor}$$

⬆ Wert d. Gauß-Seidel-Verfahrens

$w=1$ :  $v_{ij}^{(n)} = v_{ij}^{(n-1)}$  ... Gauß-Seidel-Verfahren

$w < 1$ : ... schrittweise Unterrelaxation

$1 < w < 2$ : ... Überrelaxation (SOR)

$w > 2$ : Divergenz

\*)  $w_{\text{opt}}$  stark vom Problem abhängig (z.B.  $\frac{2}{1+\sin(\frac{\pi}{N})}$ )

## FDTD

\*) Finite Difference Time Domain

\*) Direkte Simulation elektromagnet. Wellenausbreitung

\*) Ausgangspkt.: Maxwell-Gl.

Bsp.: Ebene Welle in z-Richtung:  $\vec{E} = E_x(z,t) \cdot \vec{e}_x$   
 $\vec{H} = H_y(z,t) \cdot \vec{e}_y$

Discretisierung:

$$z = k \cdot \frac{\Delta z}{h}$$

$$t = n \cdot \Delta t$$

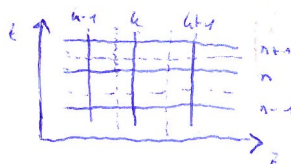
$$\Rightarrow E_x(z,t) = E_x(k \cdot \Delta z, n \cdot \Delta t) \approx E_x^n(k)$$

$$H_y(z,t) = \dots = H_y^n(k)$$

$$\Rightarrow E_x^{n+\frac{1}{2}}(k) = E_x^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta z} [H_y^n(k+\frac{1}{2}) - H_y^n(k-\frac{1}{2})]$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(k+\frac{1}{2}) = H_y^n(k+\frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta z} [E_x^{n+\frac{1}{2}}(k) - E_x^{n-\frac{1}{2}}(k)]$$

Runge-Kutta-Schema:



Stabilitätskriterium:

$$1D: v_{ph} \cdot \Delta t \leq \Delta z$$

$$3D: v_{ph} \cdot \Delta t \leq \frac{h}{\sqrt{3}}$$

harmon. Vorgänge:  $h \ll \lambda \Rightarrow \Delta t \leq \frac{h}{c}$

Rand: absorbierende R.B. → Welle läuft weiter

## FEM

Einführung:

\*) Unstrukturiertes Gitter → flexible Modellierung

\*) Feldgebiet in sog. "finite Elemente" unterteilt (diskretisiert)

Dreiecks- (Versachselemente (2D))

\*) Für jedes FE wird ein charakterist. - problemgenet. Gleichungssystem erstellt und durch Assemblierung erhält man das globale Gleichungssystem

Tetraeder, Hexaeder (3D)

\*) Formierungsansätze:

- direkte Methode (Strukturmechanik)

- Variationsansatz (physik. Zugang)

- Methode d. gewichteten Residuen (math. Zugang)

## Direkte Methode

(Matrix-Stützpunkt-Methode)

[an Bsp. 1D-FE  
i. d. Stabmechanik]

Grundlage d. Formulierung:

Hooke'sches Gesetz:  im GG:  $F_1 = -F_2 \Rightarrow F_1 = k(u_1 - u_2)$   
 $F_2 = k(u_2 - u_1)$

→ FE-Gleichungssystem: 
$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \stackrel{!}{=} [K^E] \{u\} = \{F^E\}$$
  
(lokales FE-GG-System)

→ Gesamt-GG-System: Verschopplung d. FE durch Assemblierung d. lokalen FE-Gleichungen, z.B.:

$$\text{GMM} \Rightarrow \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Assemblierung: 
$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

## Methode mittels Variationsrechnung

\*) Feldproblem wird als Variationsproblem formuliert und mittels Ritz'scher Methode gelöst

\*) Lsg. d. Problems: Extrema d. Funktional:

- direkt (Bestimmung d. Extrema → Ansatz)

← - indirekt: Lösen d. Euler-Lagrange-Gleichung

\* Für jedes physikal. Problem gibt es schwach. Funktional

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dy} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \frac{dy}{dx}$$

\*) charakter. Funktional:  $I(y) = \int F(y, y', x) dx = \frac{1}{2} \int \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2f \cdot u \right] dx dy$   
(aus Poisson-Gl. zu + f)

Ritz'sche Methode: Ansatz:  $u = u_0(x, y) + \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x, y)$  mit  $u_0$  bekannte Fkt, die alle R.B. erfüllt (füllt die FEM Lsg.)

$$\Rightarrow \frac{\partial I(u)}{\partial (a_i)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial I(a_1, \dots, a_n)}{\partial a_i} = 0$$

(für  $i=1, \dots, n$ )

→ algebraisches Gleichungssystem von  $a_1, \dots, a_n$ :

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial \phi_i}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial \phi_i}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial a_i} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial \phi_i}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial I}{\partial a_i} = \int \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + f \phi_i \right] dx dy = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_j \int \left[ \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right] dx dy = - \int f \phi_i dx dy$$

$$\Rightarrow [k] \{a\} = \{R\} \quad \text{mit} \quad k_{ij} = \int \left[ \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right] dx dy$$

$$r_i = - \int f \phi_i dx dy$$

## Methode d. gewichteten Residuen:

\*) Näherungsweise Lsg. d. Ogl. durch linear unabh. Ansatzfkt:  $u(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j(\vec{r})$

\*) Residuum:  $\epsilon(\vec{r}) = L(u(\vec{r})) - f(\vec{r}) \neq 0$

Def.:  $L u_i(\vec{r}) = f(\vec{r})$

Gewichtung:  $\langle \epsilon, w \rangle = \int \epsilon(\vec{r}) w(\vec{r}) d\Omega$  --- inneres Produkt → wird = 0 gesetzt (→  $\epsilon$  in Null v.)

$$\langle \epsilon, u_i \rangle = \int \left[ \sum_{j=1}^n a_j L \phi_j - f \right] u_i d\Omega = 0 \quad \text{für } i=1, \dots, n$$

\*) Methode nach Galerkin:  $u_i(\vec{r}) = \phi_i(\vec{r})$

z.B.  $L = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Rightarrow$  part. Integration → Lsg. = ... (s. Problem)



Diskretisierung: 1)  $\phi_i(x,y) \Rightarrow N_k(x,y)$  bzw.  $N_k(\xi, \eta)$

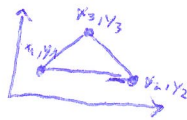
2)  $q_i \rightarrow U_k$  ... gesuchte Knotenwerte

3)  $u(x,y) = \sum N_k(x,y) U_k$  Ansatz

4) FEM-Gl.:  $[k]^{(e)} \{U\}^{(e)} = \{F\}^{(e)}$  mit  $k_{ij} = \iint \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy$

$$r_i = - \iint f N_i dx dy$$

Lineare Formfkt.  
bei Dreieckselementen:



$$N_k(x,y) = \frac{a_k + b_k x + c_k y}{2A_\Delta}$$

$$\text{mit } A_\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$$

$$b_1 = y_2 - y_3$$

$$c_1 = x_3 - x_2$$

$$a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3$$

$$b_2 = y_3 - y_1$$

$$c_2 = x_1 - x_3$$

$$a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$$b_3 = y_1 - y_2$$

$$c_3 = x_2 - x_1$$

$$\Rightarrow N_1(x,y) = \dots$$

$$N_2(x,y) = \dots$$

$$N_3(x,y) = \dots$$

$$k_{ij} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3$$

$$k_{ij} = \iint \left( \frac{b_i b_j}{4A_\Delta^2} + \frac{c_i c_j}{4A_\Delta^2} \right) dx dy = \frac{1}{4A_\Delta} (b_i b_j + c_i c_j)$$

unabh. von x,y      nicht A<sub>Δ</sub>

$$r_i = - \iint f N_i dx dy = -f_i \frac{A_\Delta}{3} \quad \leftarrow \text{Vol. d. Dreiecks}$$

mit für jede Knoten  
angegeben

Formfkt. höherer  
Ordnung



$N_k(\xi, \eta)$  ... unimod. Lagrange-Polynome 2. Ordnung

$$x(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^8 N_k(\xi, \eta) x_k$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^8 N_k(\xi, \eta) y_k$$

Übersetzung durch lokale  
Koordinaten

$$\Rightarrow \text{Ableitungen: } \frac{\partial N_k}{\partial \xi / \eta} = \frac{\partial N_k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi / \eta} + \frac{\partial N_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi / \eta}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$[J]$  ... Jacobi-Matrix gesucht

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_k}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$\text{z.B. } \frac{\partial N_k}{\partial \xi / \eta} = \frac{\partial N_k(\xi, \eta)}{\partial \xi / \eta} \cdot x_k / y_k$$

Anisotrope Feldprobleme: 4) Elektrostatische:

$$[E] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \text{div}[E] \cdot g \, dy = -S$$

$$\hookrightarrow k_{ij} = \iint \left( \epsilon_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \epsilon_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy$$

$$r_i = \iint \left( \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

mittels Elementknoten  
Vorzeichen

a) Magnetostatische:

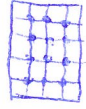
$$\text{rot}[v] \cdot \vec{A} = \vec{J} \quad \text{mit} \quad [v] = [p]^{-1} \dots \text{Balkenmatrix}$$

$$\hookrightarrow k_{ij} = \iint \left( \mu_{yy} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \mu_{xx} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

$$r_i = \iint \left( J_y \frac{\partial v}{\partial x} + J_x \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{mit} \quad \dots \text{Strombelegung}$$

$$(2D: A_2 = \text{const} \hat{=} B/H \text{ Feldlinien})$$

# BEM



$$-\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} p(\vec{r}) G(\vec{r}, \vec{r}') d\Omega + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n}(\vec{r}') - p(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} d\Omega'$$

$$\downarrow$$

$$[u]\{\phi\} = [G]\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\} + \{p_0\}$$

$$\downarrow$$

$$h_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial n_j} d\Omega + \frac{1}{2} \delta_{ij}$$

$$g_{ij} = \iint_{\Omega} G d\Omega$$

Bestimmung:  $\square(\xi) = \sum_{k=1}^N u_k \square_k$  mit  $\square \in \{x, y, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$

$$g_{ij}^{(k)} = \int_{\Omega} u_k(\xi) \frac{\partial G}{\partial n_j} d\Omega \quad \left( + \frac{1}{2} \delta_{ij} \right)$$

Formierung: 1) direkt: über R.B.

2) indirekt: lokale Quellen:  $\frac{\partial u_k}{\partial n} - \frac{\partial u_k}{\partial n} = \frac{q}{\epsilon}$   
 $q_1 - q_2 = -\frac{q}{\epsilon}$

Elemente: **AD** 0. Ordnung:  $u_0 = 1$

1. Ordnung:  $u_1 = \frac{x-\xi}{2}$   
 $u_2 = \frac{y-\eta}{2}$

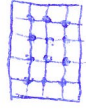
2. Ordnung:  $u_3 = \frac{1}{2} \xi^2$   
 $u_4 = \frac{1}{2} \eta^2$

**2D**

unmittelb. Lagrange-  
 Polynome (Q8-  
 Elemente)



# FDM



$$\Delta u = -f(x,y)$$

$\downarrow$

$$u_0 = \frac{u_1 u_2 + u_3 u_4}{4} + \frac{h^2}{4} f + \sigma(h^2)$$

$$\Delta u = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 4u_0}{h^2}$$

R.B.: 1) Dirichletsk: direkte Berücksichtigung

2) Neumannsk: über virtuellen Citkopunkt

5.9. Verfahren:

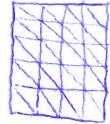
Jacob:  $n=0: \{u\}^{(0)} = \underline{0}$

**Größ-Schritt**

$n>0: u_i^{(n+1)} = \frac{1}{4} (u_{i-1}^{(n)} + u_{i+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)})$

Relaxations-Methode:  $u_{ij}^{(n)} = u_{ij}^{(n-1)} + \omega (u_{ij}^{(n-1)} - u_{ij}^{(n-2)})$

# FEM



Variationsprinzip (physikal. Zugang)

$$I(u) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) + 2u f dx dy = W(u)$$

Ritzsche Methode:  $u = \sum a_j \phi_j(x,y)$

$$[k] \{a\} = \{R\}$$

$$\rightarrow k_{ij} = \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right] dx dy$$

$$r_j = - \iint_{\Omega} 2 \phi_j f dx dy$$

Diskretisierung:

$$\phi_i(x,y) \rightarrow u_i(x,y) \text{ bzw. } u_i(\xi, \eta) \Rightarrow a_j \rightarrow u_j \dots \text{gesucht Knotenwerte}$$

$$u(x,y) = \sum u_k(\xi, \eta) u_k$$

$$\hookrightarrow [k]^{(e)} \{u\}^{(e)} = \{R\}^{(e)}$$

$$r_j = - \iint_{\Omega} \phi_j f dx dy$$

Elemente:

lineare Funktion:

bzw. 1-Elemente:

$\downarrow$

Form-Fkt. stellen lokalen

Knoten-Sym. auf dem

Zugehörigen  $\Delta$  dar

$$u_k(x,y) = \frac{a_k + b_k x + c_k y}{2 \Delta}$$

$$a_1 = x_2 y_3 - y_2 x_3 \quad b_1 = y_2 - y_3 \quad c_1 = x_3 - x_2$$

$$a_2 = x_3 y_1 - y_3 x_1 \quad b_2 = y_3 - y_1 \quad c_2 = x_1 - x_3$$

$$a_3 = x_1 y_2 - y_1 x_2 \quad b_3 = y_1 - y_2 \quad c_3 = x_2 - x_1$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{\partial u_k}{\partial x} = \frac{b_k}{2 \Delta} \quad \frac{\partial u_k}{\partial y} = \frac{c_k}{2 \Delta}$$

$$\Rightarrow k_{ij} = \iint_{\Omega} \left( \frac{b_i b_j}{4 \Delta^2} + \frac{c_i c_j}{4 \Delta^2} \right) dx dy = \frac{1}{4 \Delta} (b_i b_j + c_i c_j)$$

$$r_i = - \iint_{\Omega} \phi_i f dx dy = - f_i \frac{\Delta}{3}$$

Formeln. können online: Kitecad.com 2.0 oder  $\Rightarrow$

$$u(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^3 u_k \phi_k \text{ (bzw. } u_j)$$

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \left\{ u \right\} = [B] \cdot \left\{ u \right\}$$

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \right\} = [B] \cdot \left\{ u \right\}$$

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \right\} = [B] \cdot \left\{ u \right\}$$

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \right\} = [B] \cdot \left\{ u \right\}$$